83e Année (1972-1973) Août-Septembre 1972 N° 1-2

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Fondée en 1890)

Sujets donnés aux concours d'Agrégation et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1972

N.D.L.R. — Pour permettre à ce numéro de la Revue de présenter un éventail des concours aussi large que possible, nous avons dû renoncer à faire paraître le sujet de certaines épreuves. Nos lecteurs voudront bien nous en excuser.

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Composition de mathématiques générales.

5990. Préambule. — On rappelle qu'une droite (D) du plan projectif complexe (Π) est tangente à une conique propre (C) de ce plan si elle ne rencontre (C) qu'en un point. On dira que (D) est tangente à une conique dégénérée en deux droites distinctes si elle passe par le point commun à ces deux droites. On ne parlera pas de tangente à une conique dégénérée en deux droites confondues. Si A et A′ sont des points d'une conique propre, on désignera par AA′ soit la droite joignant A et A′, si ces points sont distincts, soit la tangente (unique) en A à la conique si ces points sont confondus.

Étant donné deux coniques propres (Ω) et (C) distinctes, on appelle ligne polygonale de Poncelet (ligne $\mathcal{L}$) inscrite dans (Ω) et circonscrite à (C) toute suite infinie $n \longmapsto A_n$, n étant un élément de $\mathbf{Z}$ et A_n un point de (Ω), telle que les droites A_nA_{n+1} et A_nA_{n-1} soient les deux tangentes à (C), distinctes ou confondues issues de A_n. On dira que les points A_n sont les sommets de la ligne $\mathcal{L}$ et que A_n et A_{n+1} sont deux sommets consécutifs, qui d'ailleurs peuvent être confondus. Une ligne $\mathcal{L}$ est un polygone de Poncelet à s sommets s'il existe un entier s, supérieur ou égal à 3, tel que l'on ait, pour tout $n (n \in \mathbf{Z})$, $A_{n+s} = A_n$, les s sommets consécutifs étant distincts.

L'objet du problème est l'étude de telles lignes polygonales, la partie I étudiant directement, et indépendamment les uns des autres, des choix particuliers de (Ω) et (C).

Les lettres X, Y et T désignent les coordonnées d'un point M de (Π) dans un repère projectif $\mathcal{R}$ qui est soit fixé à l'avance, soit à choisir convenablement en fonction de certaines conditions. On note (Φ) un faisceau linéaire ponctuel de coniques contenant (Ω).

I. — A) 1° Démontrer que, si (Φ) contient une conique dégénérée en deux droites confondues, un choix convenable de $\mathcal{R}$ permet de donner

— à cette conique dégénérée l'équation $T^2 = 0$;

— à Ω soit l'équation $Y^2 - 2XT = 0$ (premier cas), soit l'équation $X^2 + Y^2 - T^2 = 0$ (deuxième cas), ces deux cas s'excluant mutuellement.

2° Démontrer que, dans le premier cas, si (C) est une conique propre de (Φ), il n'existe aucun polygone de Poncelet inscrit dans (Ω) et circonscrit à (C).

3° Le repère $\mathcal{R}$ étant fixé, on prend pour (Ω) la conique d'équation $X^2 + Y^2 - T^2 = 0$ et pour (C) la conique (C_λ) d'équation $X^2 + Y^2 - \lambda T^2 = 0$, λ étant un nombre complexe différent de 0 et de 1.

a) Comment faut-il choisir λ pour qu'il existe au moins un polygone de Poncelet inscrit dans (Ω) et circonscrit à (C_λ)?

Le nombre entier s étant donné supérieur ou égal à 3, pour combien de valeurs distinctes de λ existe-t-il un polygone de Poncelet à s sommets inscrit dans (Ω) et circonscrit à (C_λ)?

b) Déduire de ce qui précède que, si les coniques (Ω) et (C) sont définies dans un repère quelconque par des formes quadratiques à coefficients réels et sont tangentes en deux points distincts à coordonnées réelles, un polygone de Poncelet inscrit dans (Ω) et circonscrit à (C), s'il en existe, a, au plus, deux sommets à coordonnées réelles.

B) Le repère $\mathcal{R}$ est fixé; J est le point (1, 0, 0). On prend pour (Ω) la conique, d'équation $Y^2 - 2XT = 0$, et pour (C) la conique (C_λ), d'équation $Y^2 - 2XT + \lambda YT = 0$, λ n'étant pas nul. Quel que soit λ, (C_λ) et (Ω) appartiennent à un faisceau linéaire ponctuel (Φ).

1° Une représentation paramétrique rationnelle propre de $(\overline{\Omega}) = (\Omega)\setminus\{J\}$ [(Ω) privée du point J] est $t \longmapsto A$, les coordonnées de A étant

$$X = \frac{1}{2}t^2, \qquad Y = t \qquad \text{et} \qquad T = 1.$$

Établir une condition $\theta(\lambda, t, t') = 0$ nécessaire et suffisante pour que la droite (AA') définie par les points de $(\overline{\Omega})$ de paramètres respectifs t et t' soit tangente à (C_λ).

2° *a*) On suppose $t(\lambda - 4t) \neq 0$. Établir que par le point A de paramètre t passent deux tangentes à (C_λ) qui recoupent $(\overline{\Omega})$ en des points $A'(t')$ et $A''(t'')$, les trois paramètres t, t' et t'' étant distincts.

Calculer $\frac{t'}{\lambda}$ et $\frac{t''}{\lambda}$ en fonction de $\frac{t}{\lambda}$.

b) Démontrer que, si $\frac{4t_0}{\lambda}$ n'est pas le carré d'un entier, le point A_0 de paramètre t_0 est sommet d'une ligne $\mathcal{L}$ de sommets distincts, inscrite dans (Ω) et circonscrite à (C_λ).

c) Que se passe-t-il lorsque $\frac{4t_0}{\lambda}$ est le carré d'un entier?

3° On suppose $t(\lambda - 4t) \neq 0$. Établir que par le point $A(t)$ passe au moins une tangente à la conique propre (C_ν) du faisceau (Φ) $(\nu \neq \lambda)$ coupant $(\overline{\Omega})$ en B de paramètre u, différent de t.

On pose $\nu = \lambda\rho^2$, $\lambda' = \lambda(\rho - 1)^2$, $\lambda'' = \lambda(\rho + 1)^2$.

Démontrer que des deux droites (BA') et (BA'') l'une est tangente à la conique $(C_{\lambda'})$, et l'autre à la conique $(C_{\lambda''})$.

4° Établir que, pour λ et k fixés $(k \in \mathbf{Z})$ et pour une ligne $\mathcal{L}$, quelconque inscrite dans (Ω) et circonscrite à (C_λ), les droites A_nA_{n+k} sont, quel que soit $n (n \in \mathbf{Z})$, tangentes à une même conique de (Φ), que l'on précisera.

5° Existe-t-il des polygones de Poncelet inscrits dans (Ω) et circonscrits à (C_λ)?

II. — La conique propre (Ω) et le faisceau (Φ) resteront fixes dans la partie II, (Φ) ne contenant pas de conique dégénérée en deux droites confondues. On note λ un nombre complexe quelconque.

Soit (C) une autre conique propre de (Φ), S (resp. N) la matrice symétrique d'une forme quadratique dont l'annulation définit (Ω) [resp. (C)] dans un repère $\mathcal{R}$.

On note

$d(\lambda)$, ou $\det(N - \lambda S)$, le déterminant de la matrice $N - \lambda S$;

(C_λ) la conique d'équation $\det\left[(XYT)(N - \lambda S)\begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix}\right] = 0$;

(Γ) la cubique, dite de Cayley, d'équation $\mu^2 = d(\lambda)$ dans le plan affine complexe (P) rapporté à un repère fixe, où λ et μ sont les coordonnées d'un point.

Dans une complétion projective $(\widehat{P})$ de (P), où ω est le point à l'infini de l'axe des μ, on considère

$$(\widehat{\Gamma}) = (\Gamma) \cup \{\omega\}.$$

1° La cubique $(\widehat{\Gamma})$ dépend, pour (Ω) et (C) fixées, du choix de $\mathcal{R}$, S et N. Comment se transforme-t-elle si l'on change $\mathcal{R}$, ou S, ou N? Établir que le nombre de ses points doubles ne dépend que de (Φ). A quelle condition (Φ) doit-elle satisfaire pour que $(\widehat{\Gamma})$ soit sans point double?

Jusqu'à la question II, 6° *incluse, la cubique* $(\widehat{\Gamma})$ *est supposée sans point double.* Toute droite de $(\widehat{P})$ rencontre donc $(\widehat{\Gamma})$ en trois points distincts ou non.

2° Si m et m' sont des points de $(\widehat{\Gamma})$, (mm') désigne soit la droite joignant m et m' si ces points sont distincts, soit la tangente (unique) en m à $(\widehat{\Gamma})$ si ces points sont confondus. La droite (mm') recoupe $(\widehat{\Gamma})$ en un point m''. Au couple (m, m') on associe le point, noté $m + m'$, où la droite $(\omega m'')$ recoupe $(\widehat{\Gamma})$.

En admettant sans démonstration qu'elle est associative, établir que la loi de composition interne ainsi définie munit $(\widehat{\Gamma})$ d'une structure de groupe commutatif (ce qui justifie pour cette loi la notation additive).

Montrer que, (Ω) et (C) étant fixées, les groupes $(\widehat{\Gamma}, +)$ correspondant aux différents choix de $\mathcal{R}$, S et N sont deux à deux isomorphes.

3° *a*) Montrer qu'un choix convenable du repère et des formes quadratiques définissant (Ω) et (C) permet de supposer

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -1 \\ \beta & \gamma & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{C}^3, \det N \neq 0.$$

La cubique $(\widehat{\Gamma})$ est alors fixée.

On désigne par f l'application de $(\widehat{\Gamma})$ dans Φ définie par

$$\begin{cases} f(m) = (\Omega), & \text{pour } m = \omega, \\ f(m) = (C_\lambda), & \text{pour } m \text{ point d'abscisse } \lambda \text{ de } (\Gamma). \end{cases}$$

Le point $I(0, 0, 1)$ est un point de base de (Φ). Chaque conique $f(m)$ possède en I une tangente bien déterminée, qui coupe (Ω) en I et en un point $g(m)$ éventuellement confondu avec I.

b) Soit λ_1, λ_2 et λ_3 trois nombres complexes. Établir une condition, $\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$, nécessaire et suffisante pour que ces trois nombres soient les abscisses de trois points m_1, m_2 et m_3 de (Γ) vérifiant la relation

$$m_1 + m_2 + m_3 = \omega.$$

c) Démontrer que, si m_1, m_2 et m_3 sont trois points de $(\widehat{\Gamma})$ vérifiant la relation $m_1 + m_2 + m_3 = \omega$, alors la droite $g(m_1)g(m_2)$ est tangente à la conique $f(m_3)$.

4° Soit c l'un des points de (Γ) dont l'image par f est (C). Démontrer que les deux tangentes à (C) menées par le point $g(m)$ de (Ω) sont les deux droites $g(m)g(m + c)$ et $g(m)g(m - c)$.

5° On considère dans cette question les lignes $\mathcal{L}$ inscrites dans (Ω) et circonscrites à (C).

a) Établir que, s'il existe une ligne $\mathcal{L}$ périodique de plus petite période strictement positive s, alors toute ligne $\mathcal{L}$ est périodique de plus petite période strictement positive s. Ces lignes sont-elles des polygones de Poncelet? Que se passe-t-il, selon la parité de s, pour une ligne $\mathcal{L}$ périodique admettant pour sommet un point de base de (Φ) ou un point de contact d'une tangente commune à (Ω) et à (C)?

b) Dans le cas où il n'existe aucune ligne $\mathcal{L}$ périodique, démontrer que les sommets d'une ligne $\mathcal{L}$ sont distincts, sauf dans certains cas, que l'on précisera.

c) Démontrer que, pour un entier k fixé et pour toute ligne $\mathcal{L}$, les droites A_nA_{n+k} sont, quel que soit $n (n \in \mathbf{Z})$, tangentes à une même conique de (Φ), que l'on précisera.

6° *a*) Dans le faisceau (Φ) existe-t-il des coniques (C_λ) dont trois tangentes forment un triangle inscrit dans (Ω)?

En se plaçant dans les hypothèses du II, 3°, *a*, établir une condition, portant sur α, β et γ, d'existence de lignes $\mathcal{L}$ de période 3 inscrites dans (Ω) et circonscrites à (C).

b) Dans le faisceau (Φ) existe-t-il des coniques (C_λ) dont quatre tangentes forment un quadrangle inscrit dans (Ω)?

En se plaçant dans les hypothèses du II, 3°, *a*, établir une condition, portant sur α, β et γ, d'existence de lignes $\mathcal{L}$ de période 4 inscrites dans (Ω) et circonscrites à (C).

7° *On suppose dans cette question que la cubique* $(\widehat{\Gamma})$ *a un point double.*

Démontrer que dans ce cas il n'existe pas de droite de $(\widehat{P})$ incluse dans $(\widehat{\Gamma})$.

Que deviennent les résultats des cinq questions précédentes?

Analyse.

On désigne

— par $\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{N}$) l'ensemble des entiers relatifs (resp. naturels),

— par (x_1, x_2, x_3) le point courant de $\mathbf{R}^3$,

— par $\mathbf{R}_1$ [resp. $\mathbf{R}_2$ et $\mathbf{R}_3$] le sous-espace formé par les vecteurs de la forme $(x_1, 0, 0)$ [resp. $(0, x_2, 0)$ et $(0, 0, x_3)$],

— par (z, x_3) le point courant de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$, $\mathbf{C}_1$ étant le sous-espace formé par les vecteurs de la forme $(z, 0)$.

On identifie $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ à $\mathbf{R}^3$ par la relation $(z, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$, avec $z = x_1 + ix_2$.

Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbf{R}^n$, $A + B$ désigne l'ensemble des vecteurs $X + Y$, où X parcourt A et Y parcourt B.

Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$ et ω une partie de Ω, $\mathfrak{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions à valeurs complexes indéfiniment différentiables sur Ω et $\mathfrak{D}(\omega, \Omega)$ la partie de $\mathfrak{D}(\Omega)$ constituée par celles qui s'annulent sur ω; pour $n = 3$, $H(\Omega)$ est formé par les fonctions f de $\mathfrak{D}(\Omega)$ telles que, pour tout nombre c réel, la fonction partielle $z \longmapsto f(z, c)$ soit holomorphe sur la section de Ω par le plan d'équation $x_3 = c$; la dérivée de cette fonction sera notée $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

I. — On désigne par S l'ensemble des suites doubles $a = (a_{p,q})$ à valeurs complexes indexées par $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$. Étant donné $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ dans S, $\mathfrak{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ désignera l'ensemble des suites $\boldsymbol{c}$ de S vérifiant pour tout couple (p, q) de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$

$$c_{p+1,q} = a_{p,q}c_{p+2,p+1} + b_{p,q}c_{p,q+2}.$$

1° Soit k un entier donné quelconque dans $\mathbf{N}$. Démontrer l'existence de fonctions $\Gamma_{i,j,k}$ polynomiales des $a_{p,q}$ et $b_{p,q}$, à coefficients positifs, et telles que pour tout $\boldsymbol{c}$ dans $\mathfrak{R}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ on ait

$$c_{0,0} = \sum_{\substack{i+2j=3k \\ k \leqslant j \leqslant 2k}} \Gamma_{i,j,k}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})c_{i,j}.$$

2° Soit $a' = (a'_{p,q})$ et $\boldsymbol{b}' = (b'_{p,q})$ deux suites à valeurs réelles de S, telles que, pour tout couple, (p, q) de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ vérifiant $|p + 1| \leqslant q$, on ait $|a_{p,q}| \leqslant a'_{p,q}$ et $|b_{p,q}| \leqslant b'_{p,q}$.

Démontrer alors

$$|\Gamma_{i,j,k}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leqslant \Gamma_{i,j,k}(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}').$$

3° Soit ε la suite de S définie par $\varepsilon_{p,q} = \dfrac{\alpha}{q+1}$ $(\alpha \in \mathbf{C}, \alpha \neq 0)$. Vérifier l'inégalité $|\Gamma_{i,j,k}(\varepsilon, \varepsilon)| \leqslant \dfrac{|2\alpha|^k}{k!}$.

4° Soit A, λ et μ trois constantes réelles positives et $(\theta_p)_{p\in\mathbf{Z}}$ une suite de nombres complexes vérifiant $|\theta_p| \leqslant 1$, pour tout p. Démontrer que, si $\boldsymbol{c}$ est une suite de S vérifiant les relations

$$c_{p+1,q} = \frac{\theta_p}{q+1} c_{p+2,q+1} + \frac{\mu(p+1)}{(q+1)(q+2)} c_{p,q+2} \qquad \text{et} \qquad |c_{p,q}| \leqslant \lambda A^{p+2q},$$

pour tout couple $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$, alors il existe un nombre M, ne dépendant que de A, λ, μ, p et q, tel que l'on ait, pour tout $k \geqslant 1$,

$$|c_{p,q}| \leqslant \frac{M^k}{(k-1)!}.$$

(On pourra commencer par majorer $|c_{0,0}|$, puis ramener le cas général au cas précédent par une translation des indices.)

En déduire que les $c_{p,q}$ sont nuls.

II. — Le point courant de $\mathbf{R}^2$ est noté (x, y); on étudie l'opérateur différentiel $D = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \boldsymbol{a}(x) \dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{b}\dfrac{\partial}{\partial x}$, où $\boldsymbol{a}$ est une fonction polynomiale du premier degré à coefficients complexes et $\boldsymbol{b}$ une constante complexe.

1° (Π) est le demi-plan formé par les points (x, y) vérifiant $y > 0$; K est une partie bornée contenue dans (Π). Démontrer que toute fonction f de $\mathfrak{D}(\Pi)$, nulle en dehors de K, bornée sur K ainsi que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre deux et vérifiant $Df = 0$, est nulle sur (Π) tout entier. (Pour cela, on pourra poser pour tout couple (p, q) de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$

$$c_{p,q} = \iint_{(\Pi)} [\boldsymbol{a}(x)]^p y^q f(x, y)\, dx\, dy \quad \text{si} \quad p \geqslant 0 \quad \text{et} \quad c_{p,q} = 0 \quad \text{si} \quad p < 0,$$

puis montrer que la suite $\boldsymbol{c} = (c_{p,q})$ vérifie les conditions du I,4° et en déduire le résultat.)

2° Ω et ω sont deux ouverts convexes non vides de $\mathbf{R}^2$ vérifiant $\omega \subset \Omega \subset \omega + \mathbf{R}_2$ et $\omega \neq \Omega$; $\complement\omega$ désigne le complémentaire de ω dans $\mathbf{R}^2$. Soit dans $\mathbf{R}^2$ une parabole $\mathfrak{L}$ d'axe parallèle à $\mathbf{R}_2$ et d'équation

$$\varphi(x, y) = \alpha y - (x^2 + \beta x + \gamma) = 0;$$

$\mathfrak{L}_i$ désigne l'intérieur de la parabole, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, y) | \varphi(x, y) > 0\}$.

a) Soit M un point donné dans $\Omega \cap \complement\omega$; démontrer que l'on peut choisir $\mathfrak{L}$ de façon que M appartienne à $\mathfrak{L}_i$ et que la composante connexe, δ, de $\mathfrak{L}_i \cap \complement\omega$ contenant M soit relativement compacte et contenue dans Ω. La parabole $\mathfrak{L}$ est ainsi choisie dans la suite.

b) Soit v une fonction de $\mathfrak{D}(\omega, \Omega)$. Démontrer que la fonction $\tilde{v}$, qui est nulle en dehors de δ et coïncide avec v sur δ, appartient à $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}_i)$.

c) Soit Φ l'application telle que $(x, y) \longmapsto (x, \varphi(x, y))$. Démontrer que l'application $g \longmapsto g \circ \Phi$ définit une bijection de $\mathfrak{D}(\Pi)$ sur $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}_i)$.

Expliciter en fonction de (α, β, γ) l'opérateur différentiel $\tilde{D}$ tel que, pour tout g de $\mathfrak{D}(\Pi)$, on ait

$$D(g \circ \Phi) = (\tilde{D}g) \circ \Phi.$$

3° Déduire des questions précédentes que D est un opérateur injectif sur $\mathfrak{D}(\omega, \Omega)$.

4° Démontrer que ce résultat subsiste pour l'opérateur $D_0 = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + b\dfrac{\partial}{\partial x}$.

III. — On étudie l'opérateur différentiel $\Delta = \dfrac{\partial}{\partial z} - i\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, défini sur les ensembles $H(\Omega)$ introduits dans le préambule.

Soit M un point (ζ, c) donné dans $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$.

1° Soit α un nombre complexe.

a) Démontrer que l'équation $\Delta u = 0$ a, dans $H(\mathbf{C} \times \mathbf{R})$, une solution unique de la forme $\Psi(z)e^{\alpha x_3}$ et satisfaisant à $u(\zeta, c) = 1$. On appelle U_n cette solution pour $\alpha = \sqrt{n}\, e^{i\theta} (n \in \mathbf{N},\ \theta$ réel donné).

b) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ converge uniformément et absolument sur tout compact d'un demi-espace ouvert P_θ ayant M comme point frontière, et que la somme s de cette série est une fonction de $H(P_\theta)$, vérifiant $\Delta s = 0$.

c) Démontrer que s n'est pas bornée au voisinage de M.

2° Soit P le plan d'équation $x_2 = 0$ et $\tilde{\Delta}$ l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_1} - i\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. Étant donné un demi-plan (Π_1) de P, dont la frontière est parallèle à $\mathbf{R}_1$ ou $\mathbf{R}_3$, et un point M de cette frontière, démontrer qu'il existe une fonction h de $\mathfrak{D}(\Pi_1)$ non bornée au voisinage de M et vérifiant $\tilde{\Delta}h = 0$.

IV. — On suppose que Ω est une partie non vide, ouverte et convexe de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$.

1° *a*) Démontrer que, si A est une partie convexe de Ω ayant plus d'un point et contenue dans un plan parallèle à $\mathbf{C}_1$, alors toute fonction de $H(\Omega)$, qui s'annule sur A, s'annule aussi sur $(A + \mathbf{C}_1) \cap \Omega$.

b) Démontrer que, si B est une partie convexe de Ω contenue dans le plan d'équation $x_2 = a$ et formant un ouvert non vide de ce plan, alors toute fonction u de $H(\Omega)$, qui s'annule sur B et vérifie $\Delta u = 0$, s'annule nécessairement sur $(B + \mathbf{R}_3) \cap \Omega$.

2° Démontrer que deux points quelconques de Ω peuvent être joints par une ligne polygonale dont les côtés sont parallèles soit à $\mathbf{C}_1$, soit à $\mathbf{R}_3$.

3° On suppose que la partie ω de Ω est un ouvert non vide, convexe, borné du plan P d'équation $x_2 = 0$; $\mathcal{E}(\Omega)$ [resp. $\tilde{\mathcal{E}}(\omega)$] désigne l'ensemble des solutions dans $H(\Omega)$ [resp. $\mathfrak{D}(\omega)$] de l'équation $\Delta u = 0$ [resp. $\tilde{\Delta}\omega = 0$]. Pour tout u de $H(\Omega)$, $\tilde{u}$ est la restriction de u à ω.

Démontrer que l'application $u \longmapsto \tilde{u}$ est une injection de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans $\tilde{\mathcal{E}}(\omega)$.

Démontrer, à l'aide des résultats de la partie III, que cette application n'est pas surjective.